Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования
«Академия реализации государственной политики и профессионального развития работников образования Министерства просвещения Российской Федерации»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ОБУЧЕНИЮ КУРСУ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В 7-11 КЛАССАХ ДЛЯ ПЕДАГОГОВ, ВНЕДРЯЮЩИХ ОБНОВЛЕННЫЕ ФГОС ООО И ФГОС СОО

Москва
2023

Авторский коллектив:
Е.И. Куприенко – эксперт Федерального методического центра
ФГАОУ ДПО «Академия Минпросвещения России»;
Т.Ф. Сергеева – доктор педагогических наук, профессор,
ведущий эксперт Федерального методического центра
ФГАОУ ДПО «Академия Минпросвещения России».

В представленных материалах описана совокупность методических приемов и примеров задач, которые могут быть использованы при обучении курсу «Вероятность и статистика» в 7-11 классах общеобразовательных организаций.

Оглавление

Введение

В настоящее время статистические и вероятностные методы приобретают все большую значимость в связи с широким распространением цифровых технологий в экономике, общественной жизни, а также в реальных жизненных ситуациях, что обуславливает необходимость формирования у выпускников школы вероятностно-статистического мышления и введения в школе отдельного предмета «Вероятность и статистика».

В школьном курсе данному предмету выделяют один час в неделю, начиная с седьмого класса, всего 102 учебных часа. Внедрение предмета «Вероятность и статистика» призвано сформировать у учащихся совокупности умений и навыков, таких как: умение оперировать понятиями (случайный опыт / случайный эксперимент, элементарное событие/элементарный исход случайного опыта, случайное событие, вероятность события; умение находить вероятности случайных событий в опытах с равновозможными элементарными событиями; умение решать задачи методом организованного перебора и с использованием правила умножения; умение оценивать вероятности реальных событий и явлений, понимать роль практически достоверных и маловероятных событий в окружающем мире и в жизни; знакомство с понятием независимых событий; знакомство с законом больших чисел и его ролью в массовых явлениях; умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, приводить примеры математических закономерностей в природе и жизни, распознавать проявление законов математики и др.

Также внедрение теории вероятности в школьный курс позволяет развить у обучающихся логическое мышление, анализировать ситуации, решать поставленные задачи, находить пути их решения, возможность сопоставлять и применять данные знания в реальной жизни.

В Примерной рабочей программе учебного курса «Вероятность и статистика» цели его изучения для 7-9 классов определены следующим образом:

«Каждый человек постоянно принимает решения на основе имеющихся у него данных. А для обоснованного принятия решения в условиях недостатка или избытка информации необходимо в том числе хорошо сформированное вероятностное и статистическое мышление.

Именно поэтому остро встала необходимость сформировать у обучающихся функциональную грамотность, включающую в себя в качестве неотъемлемой составляющей умение воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных процессов и зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты» [3].

Целями изучения учебного курса в 10-11 классах являются: «Учебный курс «Вероятность и статистика» базового уровня является продолжением и развитием одноимённого учебного курса базового уровня основной школы. Курс предназначен для формирования у обучающихся статистической культуры и понимания роли теории вероятностей как математического инструмента для изучения случайных событий, величин и процессов. При изучении курса обогащаются представления обучащихся о методах исследования изменчивого мира, развивается понимание значимости и общности математических методов познания как неотъемлемой части современного естественно-научного мировоззрения. У обучающихся должно сформироваться представление о наиболее употребительных и общих математических моделях, используемых для описания антропометрических и демографических величин, погрешностей в различного рода измерениях, длительности безотказной работы технических устройств, характеристик массовых явлений и процессов в обществе» [4].

Рассмотрим методические приемы, которые могут быть использованы как для первичного ознакомления учащихся с материалом, так и для его повторения в выпускных классах.

1. Элементы комбинаторики. Методический прием «Усложнение условий»

Суть приема заключается в сравнении условия задач ии выборе соответствующей формулы комбинаторики.

Задачи

1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры не повторяются

$$P_n = n!\,,\ P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр **1, 2, 3, 4, 5.**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}\ ,\ A_5^3 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2} = 60$$

3. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр **1, 2, 3, 4, 0,** если цифры не повторяются

$$P_n = n!\,,\ P_5 - P_4 = 1\cdot 2\cdot3\cdot4\cdot5 - 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 96$$

4. Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр **1, 2, 3, 4, 0**.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_5^3 - A_4^2 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2} - \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2}$$

5. Из 10 туристов нужно выбрать четырех дежурных.

Сколькими способами это можно сделать?

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_{10}^3 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = 120$$

6. Из 10 туристов, среди которых 6 юношей и 4 девушки, нужно выбрать трех дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

7. Из 10 туристов, среди которых 6 юношей и 4 девушки нужно выбрать четырех дежурных: 2 юношей и 2 девушек. Сколькими способами это можно сделать?

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}x$$

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 90$$

8. Из 10 туристов, среди которых 6 юношей и 4 девушки нужно выбрать четырех дежурных: 2 юношей или 2 девушек. Сколькими способами это можно сделать?

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_6^2 + C_4^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 21$$

Для решения задач используем приведенные ниже формулы (Рисунок 1).

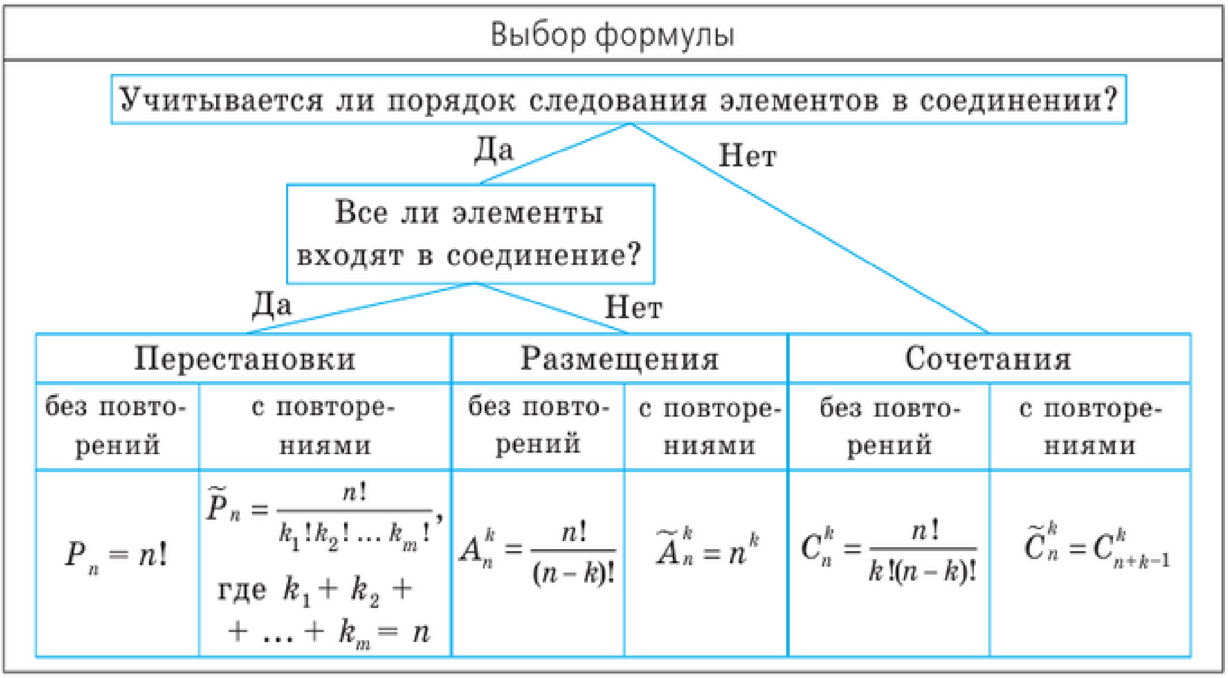


Рисунок 1 (Е.П. Нелин, В.А. Лазарев [2])

2. Статистические характеристики. Методический прием «Интерпретация понятия»

Школьный клуб по финансовой грамотности посещают 35 учащихся разных возрастов:

13, 15, 13, 12, 15, 14, 12, 13, 16, 14, 15, 14, 15, 13, 14, 15, 12, 14, 13, 15, 14, 15, 13, 16, 13, 14, 15, 14, 15, 13, 14, 13, 14, 16, 13.

Упорядоченный ряд

12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16.

Объясни, что означают числа:

а) ≈ 13,97 (среднее арифметическое);

б) 13,5 (мода);

в) 14 (медиана);

г) 4 (размах).

3. Теория вероятностей. Основные понятия. Методический прием «Гроздь задач»

Рассмотрим последовательность шагов по обучению учащихся (повторению) основным понятиям теории вероятностей.

1. Эксперимент со случайными событиями: статистическое определение вероятности (относительная частота).

2. Случайное событие, равновозможные, несовместные, достоверные, невозможные события.

3. Пространство элементарных событий.

4. Классическое определение вероятностей:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

5. Геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } U}.$$

Задание

Укажите, какие из событий являются достоверными, невозможными, случайными (Таблица 1).

Таблица 1

Эксперимент	**Событие**
Подкидывание монеты	Выпадение орла
Участие в беспроигрышной лотерее	Билет не выиграл
Бросок игрового кубика	Выпадение числа очков от 1 до 6

Ответ:

Выпадение орла – случайное событие.

Билет не выиграл – невозможное событие.

Выпадение числа очков от 1 до 6 – достоверное событие.

На основе одного контекста конструируем задачи на нахождение вероятности случайного события, для решения которых используются разные формулы комбинаторики.

Задача

Олег, Игорь и Михаил решили выяснить, какой цвет волос и какой цвет глаз у учащихся его школы встречается чаще, а какой реже. После одного из общешкольных мероприятий, которое проводилось в актовом зале школы, они записывали цвет волос и цвет глаз каждого выходящего и заносили результаты в таблицы 2 и 3.

Таблица 2 – Цвет волос

Цвет волос	Брюнеты	Шатены	Рыжие	Блондины	**Всего**
Число людей	181	357	78	184	800

Таблица 3 – Цвет глаз

Цвет глаз	Карие	Голубые	Серые	Зеленые
Число людей	369	217	118	96

Вычислите вероятность:

а) что выбранный наугад учащийся будет шатеном (не шатеном):

$$P(A) = \frac{357}{800}\,(P\,(\bar{A}) = 1 - \frac{357}{800})$$

б) что выбранный наугад учащийся будет шатеном или рыжим:

$$P(A) = \frac{357}{800} + \frac{78}{800}$$

в) что выбранный наугад учащийся будет блондином с голубыми глазами:

$$P(A) = \frac{187}{800} \cdot \frac{217}{800}$$

г) выбираем учащихся из разных из разных категорий (используем формулы комбинаторики), например, для фотографии на рекламный стенд школы необходимо выбрать 20 шатенов и 15 блондинов.

Для раскрытия смысла понятия «вероятность» может быть использовано следующее задание.

Задание

Замените слова в описании реальной ситуации на термины теории вероятностей.

1) В танцевальном кружке занимаются **15 девочек** и **10 мальчиков**. На конкурс необходимо отобрать **3 пары детей**. Оцените возможность попасть на конкурс для девочки и для мальчика.

Ответ: «возможность» следует заменить на «вероятность»

2) Магазин проводит акцию. Покупатель, купивший каждую сотую коробку конфет марки «*N*» выигрывает **500 рублей**. Покупатель ***A*** выиграл 500 рублей. Как можно охарактеризовать покупку сотой коробки и девяноста девяти предыдущих?

Ответ: как противоположные события, как несовместные события

3) При бросании игрального кубика могут выпасть числа от 1 до 6. Как можно назвать все шесть случаев?

Ответ: полная группа событий.

будут полезны контекстные задачи. Рассмотрим пример такой задачи.

Лучшему пониманию смысла «вероятность» будет способствовать решение задач по формированию математической грамотности. Приведем пример такой задачи.

Задача

Подводные землетрясения и извержения вулканов вызывают огромные волны, нередко докатывающиеся до материков. Эти волны называют **цунами**. В переводе с японского языка термин «цунами» означает **«гигантская волна, пришедшая в гавань».** Учёные установили, что землетрясения силой **более 7,5 балла** в 90 % случаев вызывают цунами. Также к причинам образования цунами относят оползни, извержения вулкана, падение метеорита, сильный ветер. Искусственное цунами может быть вызвано ядерным взрывом.

За последние 10 лет наиболее крупное цунами произошло в северной части острова Хонсю (Япония, 2011 год). Землетрясение и цунами стали причиной аварии на атомной электростанции Фукусима-1.

Вопрос 1

Какое из утверждений правильно передаёт мнение учёных?

A) Если произошло землетрясение силой меньше 7,5 балла, то цунами не произойдёт.

B) Вероятность того, что при землетрясении силой 7,5 балла произойдёт цунами, больше, чем вероятность того, что оно не произойдёт.

C) Невозможно сказать о том, что может случиться, потому что никто точно не знает, когда произойдёт землетрясение.

D) Вероятность того, что при землетрясении силой меньше 7,5 балла произойдёт цунами, составляет 10 %.

4. Контекстные задачи

Решение контекстных задач также позволяет осуществить интеграцию математического содержания и более полно раскрывает смысл математических понятий, что иллюстрирует следующая контекстная задача.

Контекстная задач «Опрос»

Современный рынок туристских услуг предлагает большое количество туров с различными маршрутами для семейного и индивидуального отдыха для разных возрастов.

Туристическая фирма провела опрос среди **215 случайно выбранных респондентов**, чтобы выяснить распределение туристов по возрасту и полу. Результаты опроса представлены на рисунке 2.

Вычислите вероятность следующих событий:

а) выбрать респондента **мужчину**

б) выбрать респондента **до 35 лет**

в) вероятность выбрать мужчину **не старше 35 лет** г) вероятность не выбрать респондентом **женщину 20 лет**

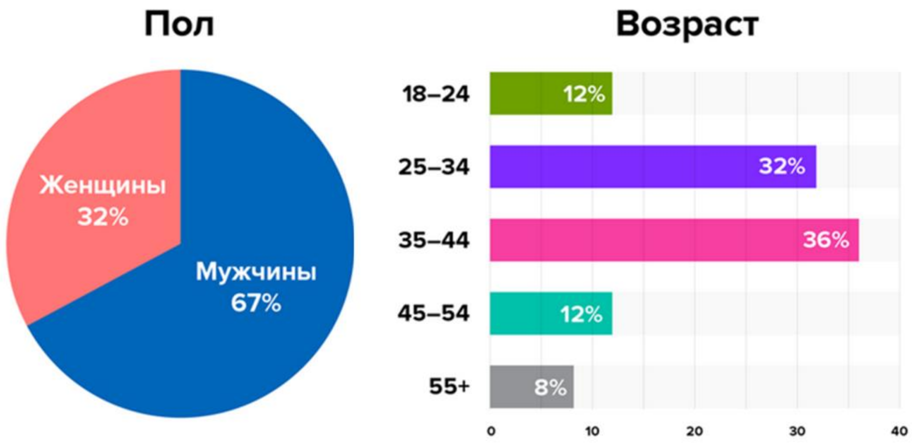


Рисунок 2

Использование заданий, которые направлены на формирование математической грамотности с использованием аппарата теории вероятностей, позволяют обогащать социальный опыт обучающихся и учит принимать обдуманные решения. Приведем пример такой задачи.

Контекстная задача «Интернет-магазин»

С каждым годом все больше людей совершают покупки в интернет-магазинах.

Петр Иванович решил заказать товар в интернет-магазине. Он изучил отзывы покупателей о работе двух интернет-магазинов, которые представлены в таблице 4.

Таблица 4

	Магазин 1	**Магазин 2**
Всего отзывов	120	150
Недовольны качеством товара	20 чел	18 чел
Не вовремя доставлен товар	12 чел.	12 чел.

Оцените возможность получить товар не вовремя, если заказать его сразу в двух магазинах.

Решение:

Необходимо вычислить вероятности трех событий, которые составляют полную группу событий:

A – получить товар не вовремя в 1 магазине: *P(A)* = 12 : 120 = 0,1

$\bar{A}$ – получить товар вовремя в 1 магазине *P(AB)* = 0,1 · 0,08 = 0,008

Тогда вероятность события *E* – получить товар не вовремя – будет равна сумме вероятностей:

P(E) = 0,1 · 0,92 + 0,08 · 0,9 + 0,008 = 0,172

$P(\bar{A})$ = 1 – 0,1 = 0,9

B – получить товар не вовремя во 2 магазине:

P(B) = 12 : 150 = 0,08 $\bar{B}$ – получить товар вовремя во 2 магазине

$P(\bar{B})$ = 1 – 0,08 = 0,92

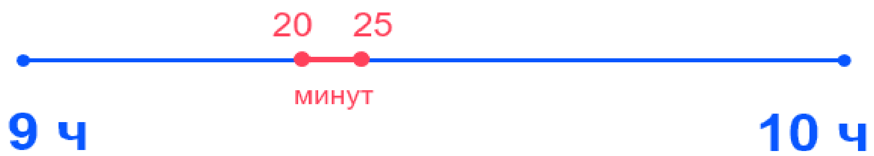
5. Геометрическая вероятность

Приведем примеры задач, в которых раскрывается геометрический смысл вероятности.

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } U}$$

Задача

Оля пообещала подруге Кате позвонить в промежутке от 9 ч до 10 ч утра. Найдите вероятность того, что разговор начнется в промежутке от 9 ч 20 мин до 9 ч 25 мин.



$$P(A) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

Задача

Какова вероятность Вашей встречи с другом, если вы договорились встретиться в определенном месте, с **12:00** до **13:00** часов и ждете друг друга в течение **5 минут**?

Обозначим за $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ время прихода, $0 \le x, y \le 60$ (минут). В прямоугольной системе координат этому условию удовлетворяют точки, лежащие внутри квадрата ***OABC*** (Рисунок 3). Друзья встретятся, если между моментами их прихода пройдет не более 5 минут, то есть

$$y - x < 5, \qquad y > x$$
$$x - y < 5, \qquad x > y$$

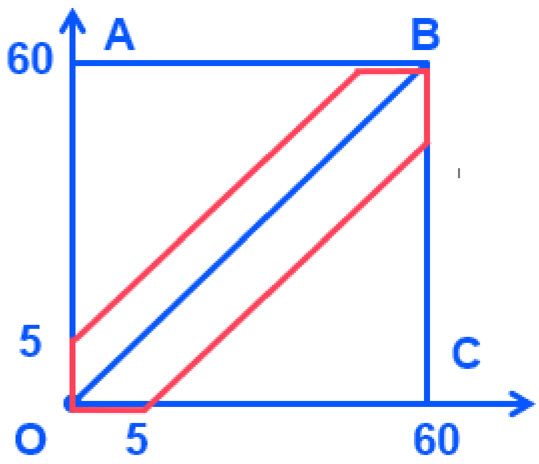


Рисунок 3

Этим неравенствам удовлетворяют точки, лежащие в области ***G***, очерченной красным.

Тогда вероятность встречи равна отношению площадей ***G*** и квадрата, то есть

$$P(A) = \frac{S_G}{S_{OABC}} = \frac{60 \cdot 60 - 55 \cdot 55}{60 \cdot 60} = \frac{23}{144} \approx 0{,}16$$

Ответ: 0,16.

В 10-11 классах важное значение отводится аксиоматическому определению вероятности.

6. Аксиоматическое определение вероятности

Аксиома 1. Каждому случайному событии. ***A*** из поля событий ***S*** поставлено в соответствие неотрицательное число ***P(A)***, называемое вероятностью, такое, что $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega)$.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события $U = Q$ равна единице: $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 3. Вероятность суммы (объединения) двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Задача

Результаты опроса 1 000 случайно отобранных молодых людей таковы:

работают 811 чел.,

учатся 518 чел.,

работают и учатся одновременно 356 чел.,

проживают в Москве 752 чел.,

из москвичей: работают 570 чел.,

учатся 348 чел.,

работают и учатся одновременно 297 чел.

Определить, содержится ли в этой информации ошибка.

$$P\{A\}\approx 0{,}811$$
$$P\{B\}\approx 0{,}752$$
$$P\{C\}\approx 0.518$$
$$P\{A\cap B\}\approx 0{,}570$$
$$P\{B\cap C\}\approx 0{,}348$$
$$P\{A\cap C\}\approx 0{,}356$$
$$P\{A\cap B\cap C\}\approx 0{,}297$$

$$P\{A\cap B\cap C\}=P\{A\}+P\{B\}+P\{C\}-P\{A\cap B\}-P\{B\cap C\}-P\{A\cap C\}-P\{A\cap B\cap C\}\approx 1{,}104>1.$$

7. Схема Бернулли

Теорема. Пусть производится ***n*** независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие ***A*** может появиться с вероятностью $P(A)=p$ и не появиться с вероятностью $P(\bar{A})=1-P(A)=1-p=q$. Тогда вероятность появления события ***A m*** раз в ***n***испытаниях вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\qquad \text{где } C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!},\qquad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n$$

Можно также получить вероятность того, что событие ***A*** произойдет в ***n*** испытаниях не более ***k*** раз ($m\le k$) и более ***k*** раз ($m>k$):

$$P_n(m \le k) = \sum_{m=0}^{k} P_n(m)$$

$$P_n(m > k) = \sum_{m=k+1}^{n} P_n(m) = 1 \cdot \sum_{m=0}^{k} P_n(m)$$

Задача

Каждую осень Валентина Петровна собирает в лесу грибы и продает их на рынке. Она заметила, что 20% грибов в лесу – червивые и не годятся для продажи, однако вероятность, что из 10 грибов 9 окажутся годными, больше, чем вероятность того, что из 10 грибов только 5 окажутся годными. Во сколько раз больше? Ответ округлите до целого числа.

Решение.

По условию, вероятность того, что случайно выбранный гриб годен для продажи (не червивый), равна $\frac{4}{5}$.

Нужно найти вероятность того, что из 10 грибов 9 окажутся годными, и что из 10 грибов 5 окажутся годными. В этом нам поможет формула Бернулли.

Пусть проводится $\boldsymbol{n}$ одинаковых независимых испытаний, в каждом из которых случайное событие $\boldsymbol{A}$ может произойти с вероятностью $\boldsymbol{p}$ или не произойти с вероятностью $\boldsymbol{q = 1 - p}$.

Вероятность P_n^m того, что в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях некоторое случайное событие $\boldsymbol{A}$ наступит ровно $\boldsymbol{m}$ раз, равна: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где

p – вероятность появления события A в каждом испытании;

$q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в каждом испытании.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Найдем вероятность того, что из 10 грибов 9 годные. Это значит, что $n = 10, m = 9, p = \frac{4}{5}$ (вероятность того, что случайно выбранный гриб годный); $q = \frac{1}{5}$ – вероятность противоположного события (случайно выбранный гриб червивый).

$$P_1 = P_{10}^9 = C_{10}^9 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10-9} = \frac{10!}{9!\,(10-9)!} \cdot \frac{4^9}{5^9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{10! \cdot 4^9}{9! \cdot 5^{10}} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1} \cdot \frac{4^9}{5^{10}} = \frac{10 \cdot 4^9}{5^{10}}$$

Аналогично, вероятность того, что из 10 грибов 5 хорошие, а 5 червивые, равна

$$P_2 = P_{10}^5 = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{10! \cdot 4^5}{5! \cdot 5! \cdot 5^{10}}$$

Тогда

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{10 \cdot 4^9 \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5^{10}}{5^{10} \cdot 10! \cdot 4^5} = \frac{10 \cdot 4^4 \cdot 5! \cdot 5!}{10!} = \frac{10 \cdot 4^4 \cdot 5! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{4^4 \cdot 5!}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{16 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{8 \cdot 16 \cdot 5}{63} = 10 \cdot \frac{64}{63} =$$

$$= 10\left(1 + \frac{1}{63}\right) = 10\frac{10}{63} \approx 10$$

8. Условная вероятность

Эффективным приемом для решения задач на условную вероятность является дерево случайного опыта, примеры использования которого рассмотрены в статье И. Высоцкого и В. Шапариной [1].

Дерево случайного опыта или дерево вероятностей – удобный инструмент решения задач, который позволяет рассматривать составной эксперимент как бы «по частям», мысленно расположить случайные события во времени или разбить на этапы. Объясним, как строить дерево эксперимента, на примере.

Пример 1. Велосипедист едет по парковой дорожке (Рисунок 4) и планирует выехать из парка через один из пяти выходов (A, B, C, D или E).

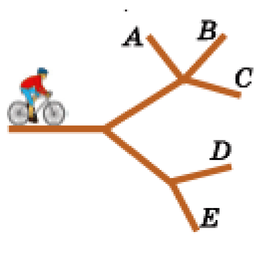


Рисунок 4

Велосипедист едет только вперед и на каждой развилке случайным образом выбирает одну из дорожек, по которой еще не ехал. Какова вероятность того, что велосипедист покинет парк:

а) через выход A;

б) через выход E?

Желательный результат обсуждения. Начальное состояние, когда велосипедист не проехал ни один из перекрестков, изобразим точкой S (Рисунок 5).

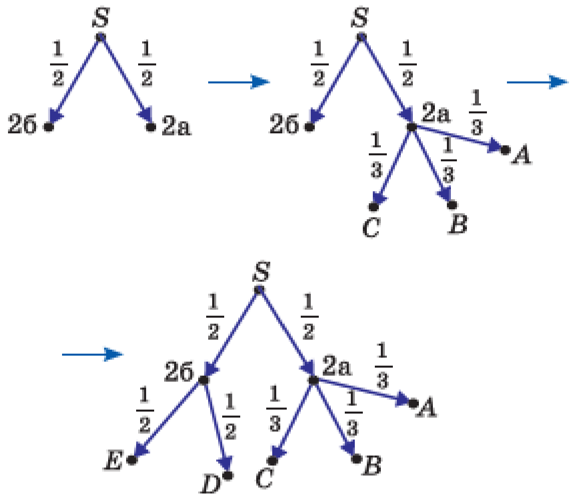


Рисунок 5

Начальную точку, конечную и точки ветвления будем называть вершинами дерева.

На первом перекрестке велосипедист может с равными шансами поехать к одному из двух перекрестков – назовем их 2а и 2б. Проведем стрелки от точки S вниз, вправо и влево.

Стрелки будем называть ребрами дерева. Около ребер подпишем вероятности событий: в нашем случае вероятности равны $\frac{1}{2}$, так как, по условию, велосипедист выбирает дальнейший путь случайным образом.

Предположим, что велосипедист поехал к перекрестку 2а. После этого может наступить одно из трех событий: он направится к выходу A, к выходу B или к выходу С. Изобразим эти элементарные исходы точками А, В и С и проведем к ним ребра. Вероятности тоже будут одинаковы и равны $\frac{1}{3}$. Аналогично изобразим варианты, когда велосипедист поехал к перекрестку 2б.

Обратите внимание учащихся на то, что сумма вероятностей около всех ребер, выходящих из одной вершины, равна единице. При построении дерева эксперимента важно за этим следить, особенно поначалу.

Элементарные события эксперимента в дереве изображаются конечными вершинами дерева.

К каждой конечной вершине ведет единственная цепочка от точки S. Поэтому можно считать, что элементарные события изображаются не только конечными вершинами, но и ведущими к ним цепочками. Например, в нашей задаче пять элементарных исходов и, соответственно, пять цепочек. Событию «велосипедист выехал через выход А» соответствует цепочка S — 2а — А.

Вероятности, которые мы подписывали на ребрах, – условные. Например, условная вероятность того, что велосипедист покинет парк через выход А, при условии, что он был на перекрестке 2а, равна $\frac{1}{3}$.

Предложите учащимся найти вероятности всех возможных элементарных событий. Для этого, пользуясь правилом умножения вероятностей, нужно найти произведения условных вероятностей вдоль каждой цепочки, ведущей от S к конечной вершине. Найденные произведения нужно сложить. Подпишите полученные вероятности на рисунке рядом с элементарными событиями (Рисунок 6).

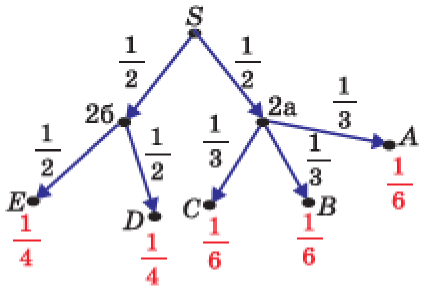


Рисунок 6

Сумма всех вероятностей должна равняться единице (как сумма вероятностей элементарных событий). Более сложные события (не элементарные) изображаются на дереве промежуточными вершинами или какой-либо фигурой, объединяющей элементарные исходы.

Приведем пример задачи на условную вероятность с использованием дерева случайного опыта.

Задача

Автоматическая линия изготавливает зарядные устройства для телефонов.

Известно, что 3% готовых устройств неисправны. Из этих неисправных устройств 98% обнаруживаются при контроле качества продукции. Однако система контроля ошибочно бракует 1% исправных устройств. Устройства, которые не забракованы, упаковываются и поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранное сошедшее с автоматической линии зарядное устройство поступит в продажу.

Желательный результат обсуждения. Построим дерево эксперимента (Рисунок 7).

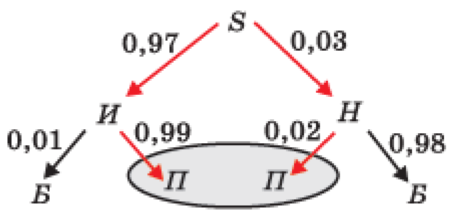


Рисунок 7

Событие «устройство исправно» обозначим буквой *И*, а событие «устройство неисправно» – буквой ***Н***. Устройства, забракованные системой контроля (а точнее, событие «устройство забраковано системой»), обозначим буквой ***Б***, событие «устройство не забраковано» обозначим буквой ***П***.

Событию ***П*** «устройство не забраковано» благоприятствуют цепочки ***SИП*** и ***SНП***, поэтому

$$P(\text{П}) = P(S\text{ИП}) + P(S\text{НП}) = 0{,}97 \cdot 0{,}99 + 0{,}03 \cdot 0{,}02 = 0{,}9609.$$

Список литературы

1. Высоцкий И., Шапарина В. Об условной вероятности в школе // Математика. Методический журнал. 2021. № 2. С. 12–21.

2. Нелин Е.П., Лазарев В.А. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. – М.: Илекса, 2012. – 423 с.

3. Примерная рабочая программа учебного курса «Вероятность и статистика». 7—9 классы // Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика (для 5–9 классов образовательных организаций) // Реестр примерных основных общеобразовательных программ. – Режим доступа: https://fgosreestr.ru/oop/primernaia-rabochaia-programma-osnovnogo-obshchego-obrazovaniia-matematika.

4. Примерная рабочая программа учебного курса «Вероятность и статистика» // Примерная рабочая программа среднего общего образования учебного предмета «Математика» (базовый уровень) для 10–11 классов образовательных организаций // Реестр примерных основных общеобразовательных программ. – Режим доступа: https://fgosreestr.ru/uploads/files/2cfb24334ff6429604cfa6962aa4b493.pdf.